Pi et le Nombre d'Or : apparitions des décimales non aléatoires

Jean-Yves BOULAY
Chercheur indépendant - 25 rue Pierre Loti 97430 LE TAMPON jean-yvesboulay@orange.fr

Résumé : Cet article démontre que l'ordre de la première apparition des dix chiffres du système décimal dans les deux plus fondamentales constantes mathématiques que sont le nombre Pi et le Nombre d'Or n'est pas aléatoire mais s'inscrit dans une logique arithmétique. Cette logique arithmétique est identique pour Pi, pour son inverse et pour le Nombre d'Or. Le même phénomène arithmétique opère également dans de nombreuses autres constantes dont les racines carrées des nombres 2, 3 et 5, les trois premiers nombres premiers.

1. Introduction.

Le nombre Pi (π) et le Nombre d'Or (φ) ainsi que les inverses de ces nombres sont formés d'une suite apparemment aléatoire de décimales. Cet article est sur l'ordre de la première apparition des dix chiffres du système décimal dans ces nombres fondamentaux des mathématiques. Il se révèle en fait que les dix chiffres du système décimal (confondus ici avec leur nombre respectif : chiffre 1 = nombre 1, chiffre 2 = nombre 2, etc.) n'apparaissent pas aléatoirement dans la suite des décimales de Pi (π) et du Nombre d'Or (φ). Ce même phénomène s'observe également pour l'inverse de ces deux nombres (1/π et 1/φ).

1.1. Méthode.

Cet article étudie l'ordre de la première apparition des dix chiffres du système décimal dans les décimales des constantes (ou nombres). Après repérage de ces dix chiffres confondus alors en nombres (chiffre 1 = nombre 1, etc.), une étude arithmétique de ceux-ci est présentée.

Constante	Nombre avec ses n premières décimales *	Ordre d'apparition des chiffres
π	3,**14**1**5926**5**3**5**8**9**7**932384626433832795**0**2…	1 4 5 9 2 6 3 8 7 0

Fig. 1. Méthode d'analyse des constantes. * n premières décimales suffisantes pour étude.

2. Ratio 3/2.

Le total des dix chiffres du système décimal, **confondus en nombres dans cet article,** est 45 :

0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45

Ce nombre 45 est la somme de deux autres : 27 + 18. Ces deux nombres ont un ratio de 3/2 et sont respectivement égaux à 3 fois et 2 fois 9. Le nombre 10, qui ici représente les dix rangs possibles des dix chiffres du système décimal, a les mêmes caractéristiques : somme de deux autre nombres avec un ratio de 3/2 : 10 = 6 + 4.

2.1. Ratio 3/2 dans les constantes π et φ.

La figure 2 analyse la constante Pi (π). Dans ce tableau, les dix chiffres du système décimal sont repérés puis classés dans l'ordre de leur première apparition ; enfin un analyse arithmétique est présentée : somme des six premières valeurs et des quatre dernières dans un ratio 3/2. Tous les tableaux de cet article utilisent le même type de configuration avec une zone arithmétique (d) plus ou moins développée.

a	π = 3,**14**1**5926**5**3**5**8**9**7**932384626433832795**0**2…									
b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c	1	4	5	9	2	6	3	8	7	0
d	**27 (3 x 9)**						**18 (2 x 9)**			

Fig. 2. Suite d'apparition des chiffres dans π. **a** : constante et repérage des apparitions des 10 chiffres du système décimal. **b** : rang de l'ordre d'apparition (de 1 à 10). **c** : chiffres classés par ordre d'apparition. **d** : regroupement arithmétique.

Il apparaît que pour π, les dix chiffres du système décimal s'organisent dans un ratio de 3/2 : le total des six premiers chiffres est de 27 et celui des quatre derniers de 18. Cette configuration n'a qu'une probabilité d'apparition [1] de 1/11,66. Ainsi, 91,43 % des combinaisons possibles d'apparition n'ont donc pas ce ratio.

La figure 3 analyse la constante 1/π. Le même phénomène s'observe pour cette constante. Les probabilités [2] qu'un tel phénomène se produise simultanément pour une constante et pour son inverse sont de 1/23,33. Seule, la constante Phi (φ), de par sa nature, a naturellement cette propriété.

1 /π = 0,31830988618379067153776752674503…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	8	0	9	6	7	5	2	4
27 (3 x 9)						**18 (2 x 9)**			

Fig. 3. Analyse de la constante 1/π.

Le même phénomène (Fig. 4) de ratio de 3/2 (27/18) est présent dans la constante φ (et bien sûr dans 1/φ).

φ * = 1,6180339887498948482045868…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	1	8	0	3	9	7	4	2	5
27 (3 x 9)						**18 (2 x 9)**			

Fig. 4. Analyse de la constante Phi. *De par sa nature même, φ et son inverse ont les décimales identiques. Ces deux nombres sont donc confondus dans cette étude.

Fig. 4. Analyse de la constante φ. *De par sa nature même, φ et son inverse ont les décimales identiques. Ces deux nombres sont donc confondus dans cette étude.

Aussi, on constate (Fig. 5) que les dix chiffres des constantes 1/π et 1/φ se répartissent identiquement dans les deux fractions du ratio 3/2 : mêmes six premiers et quatre derniers chiffres.

constante	Ordre d'apparition des 10 chiffres	Répartition	
		6 premiers chiffres	4 derniers chiffres
1 /π	3 1 8 0 9 6 7 5 2 4	3 1 8 0 9 6	7 5 2 4
1/φ (ou φ)	6 1 8 0 3 9 7 4 2 5	6 1 8 0 3 9	7 4 2 5

Fig. 5. Similitude d'apparition des chiffres dans 1/π et 1/φ.

Cette double configuration n'a qu'une probabilité d'apparition [3] de 1/210. Ainsi, 99,52% des combinaisons d'apparition de chiffres n'ont pas cette configuration.

2.2. Ratio 3/2 dans d'autres constantes.

Ce phénomène de ratio 3/2 (27/18) est présent dans d'autres constantes significatives. Ce phénomène arithmétique n'est donc pas fortuit. Ce phénomène est présent dans les constantes √5, ζ (5) (la fonction Zêta 5), le nombre e (la constante de Neper), dans les constantes de Copeland et de Kaprekar. Aussi, dans des fractions significatives ayant directement rapport avec le système décimal comme la fraction 9876543210/0123456789.

constantes	Repérage d'apparition des chiffres*	Répartition des 10 chiffres (6 et 4 chiffres classés)	
$\sqrt{5}$	2,2360679774997896964091736 ….5…	2 3 6 0 7 9	4 8 1 5
ζ (5) (Zêta 5)	1,03692775514336992633136548…	0 3 6 9 2 7	5 1 4 8
1467/6174 (constante de Kaprekar)	0,2376093294460641399416…5…8…	2 3 7 6 0 9	4 1 5 8
9876543210/0123456789	80,0..007290..06633900060368491…5…	0 7 2 9 6 3	8 4 1 5
e (constante de Neper)	2,71828182845904523536…	7 1 8 2 4 5	9 0 3 6
Constante de Copeland	0,235711131719….4…..6……8…..0…	2 3 5 7 1 9	4 6 8 0
C. de Landau-Ramanujan	0,764223653589220662990698731…	7 6 4 2 3 5	8 9 0 1

Fig. 6. Constantes avec un ratio de 3/2 (27/18) dans l'ordre de la première apparition des chiffres de leurs décimales. *Les pointillés remplacent une trop grande suite de chiffres non significatifs (déjà apparus).

constantes	Repérage d'apparition des chiffres*	Répartition des 10 chiffres (6 et 4 chiffres classés)	
9876543210/0123456789	80,**0**..00**729**0..0**6**6**3**390006036**84**9**1**…**5**...	0 7 2 9 6 3	8 4 1 5
9/12345	0,**0**…**729**0**4**009720**53**4**6**...**1**725394**8**…	0 7 2 9 4 5	3 6 1 8
12345/67890	0,**18**18**3**8**267**78612**4**61334**5**1171**0**11**9**…	1 8 3 2 6 7	4 5 0 9
12345/56789	0,**21738**3**64**8241736**95**61**0**…	2 1 7 3 8 6	4 9 5 0
13579/97531	0,**1392**2**75**27**6**57**8**72881**4**428233**0**…	1 3 9 2 7 5	6 8 4 0
543212345/123454321	4,**40**0**1**0**79**9**62**1991**35**9**8**…	4 0 1 7 9 6	2 3 5 8
235711/117532 (5 n premiers)	2,**0**0**5**50**48**8**37**7**6**333**2**53**9**2233604465**1**…	0 5 4 8 3 7	6 2 9 1
3φ/2	2,**42705**0**9831**2484227230**6**…	4 2 7 0 5 9	8 3 1 6
$3\varphi\sqrt{3-\varphi}$	5,**7063**3**9**09777709**214**3269**8**6 …**5**…	7 0 6 3 9 2	1 4 8 5
(φ +3)/4	1,**154**5**08**4**97**18747**3**71**2**05114**6**…	1 5 4 0 8 9	7 3 2 6
$4\sqrt{\pi}$ *	7,**089**8**154**0**362**…**7**…	0 8 9 1 5 4	3 6 2 7
$x \Rightarrow x^3 - 2x = (2\varphi - 1)^2$	2,**0945**5**1**4**8**154**23**2**6**…**7**…	0 9 4 5 1 8	2 3 6 7
log2/log3**	0,**63092**9**75**357**14**…**8**…	6 3 0 9 2 7	5 1 4 8

Fig. 7. Autres constantes avec un ratio de 3/2 (27/18) dans l'ordre de la première apparition des chiffres de leurs décimales.*4 $\sqrt{\pi}$ = périmètre d'un carré ayant pour surface π. ** log2/log3 = dimension fractale de l'ensemble de Cantor.

On constate que, comme pour les constantes 1/π et 1/φ, les dix chiffres des constantes regroupées figure 8 se répartissent identiquement dans les deux fractions du ratio 3/2 avec les mêmes six premiers et quatre derniers chiffres ; ceci bien qu'il existe 210 possibilités [3] pour la répartition en six et quatre chiffres dans l'ordre d'apparition des chiffres dans leurs décimales.

constante	Ordre d'apparition des 10 chiffres	Répartition	
$\sqrt{5}$	2 3 6 0 7 9 4 8 1 5	2 3 6 0 7 9	4 8 1 5
ζ (5) (Zêta 5)	0 3 6 9 2 7 5 1 4 8	0 3 6 9 2 7	5 1 4 8
1467/6174 (constante de Kaprekar)	2 3 7 6 0 9 4 1 5 8	2 3 7 6 0 9	4 1 5 8
$3\varphi\sqrt{3-\varphi}$	7 0 6 3 9 2 1 4 8 5	7 0 6 3 9 2	1 4 8 5
9876543210/0123456789	0 7 2 9 6 3 8 4 1 5	0 7 2 9 6 3	8 4 1 5
log2/log3	6 3 0 9 2 7 5 1 4 8	6 3 0 9 2 7	5 1 4 8

Fig. 8. Similitude d'apparition des chiffres dans ces 6 constantes : mêmes six premiers et quatre derniers chiffres.

Il va être démontré plus loin (chapitre 5.3) que cette combinaison de six et quatre chiffres n'est pas opportune et apparaît en propension bien plus importante que ne le permettent les probabilités.

3. Zones de 1, 2, 3 et 4 chiffres dans les constantes fondamentales.

Les constantes π, 1/π, 1/φ et d'autres (voir 3.1) ont en commun une autre propriété arithmétique très particulière. En marge du phénomène de ratio 3/2, leurs chiffres se répartissent de façon à former quatre zones d'apparition dont les sommes sont toujours multiples de 9 :

constante	π = 3,141592653589793238462643383279502…									
Rangs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Apparition des décimales	**1**	**4**	**5**	**9**	**2**	**6**	**3**	**8**	**7**	**0**
Zones		Zone 2		Zone 1			Zone 4			
	Zone 3									

Fig. 9. Identification, pour Pi, de 4 zones arithmétiques multiples de 9.

Dans ces constantes, les sommes des chiffres de quatre zones d'apparition (dont la taille est régulièrement progressive) sont toujours des multiples du nombre 9. Ces zones sont formées de 1, 2, 3 et 4 rangs d'apparition de chiffres. Aussi, ces zones (voir figure 10) sont toujours identiques :

- zone de 1 chiffre : rang 4
- zone de 2 chiffres : rangs 2 - 3
- zone de 3 chiffres : rangs 1 - 5 - 6
- zone de 4 chiffres : rangs 7 - 8 - 9 -10

π = 3,141592653589793238462643383279502…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**4**	**5**	**9**	**2**	**6**	**3**	**8**	**7**	**0**
	9 (1 x 9)		**9** (1 x 9)						
		9 (1 x 9)					**18 (2 x 9)**		
		27 (3 x 9)							
1/π = 0,31830988618379067153776752674503…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**1**	**8**	**0**	**9**	**6**	**7**	**5**	**2**	**4**
	9 (1 x 9)		**0** (0 x 9)						
		18 (2 x 9)					**18 (2 x 9)**		
		27 (3 x 9)							
1/φ = 0,6180339887498948482045868…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	**1**	**8**	**0**	**3**	**9**	**7**	**4**	**2**	**5**
	9 (1 x 9)		**0** (0 x 9)						
		18 (2 x 9)					**18 (2 x 9)**		
		27 (3 x 9)							

Fig. 10. Analyse des constantes π, 1/π et 1/φ avec mise en évidence de 4 zones arithmétiques identiques.

Ce nombre 9 est le plus grand diviseur de 45, la somme des dix chiffres du système décimal. La probabilité d'apparition de cet arrangement arithmétique [4] est de 1/420 pour chaque constante. 99,76 % des combinaisons possibles n'ont pas cette configuration. Il paraît donc peu opportun que justement, Pi, Phi et leurs inverses partage cette propriété.

3.1. Autres constantes ayant les mêmes propriétés.

On constate que, toujours avec la même probabilité de 1/420, comme pour les constantes π, 1/π et 1/φ, les dix chiffres des constantes présentées figure 11 se répartissent dans les quatre mêmes zones arithmétiques de façon à former aussi quatre valeurs multiples de 9 et ceci avec un ratio de 3/2 entre les six premiers et quatre derniers chiffres apparus :

constantes	Ordre d'apparition des 10 chiffres	Répartition				
		Zones de 1, 2 et 3 chiffres				Zone de 4 chiffres
$\sqrt{5}$	2 3 6 0 7 9 4 8 1 5	2	36	0	79	4 8 1 5
ζ (5)	0 3 6 9 2 7 5 1 4 8	0	36	9	27	5 1 4 8
9876543210/0123456789	0 7 2 9 6 3 8 4 1 5	0	72	9	63	8 4 1 5
9/12345	0 7 2 9 4 5 3 6 1 8	0	72	9	45	3 6 1 8
3φ/2	4 2 7 0 5 9 8 3 1 6	4	27	0	59	8 3 1 6
(φ + 3)/4	1 5 4 0 8 9 7 3 2 6	1	54	0	89	7 3 2 6

Fig. 11. Autres constantes avec mise en évidence de 4 zones arithmétiques multiples de 9. Probabilité de 1/420.

3.2. Similitude des constantes 1/π, et 1/φ.

Pour les constantes 1/π, et 1/φ, il a été démontré que, dans l'ordre de la première apparition des chiffres de leurs décimales, toutes deux ont le même ratio 3/2, toutes deux ont aussi, dans cette répartition, les mêmes six premiers et quatre derniers chiffres, toutes deux répartissent leurs chiffres de façon à former les mêmes quatre zones multiples de 9. Il s'avère enfin que, pour ces deux constantes fondamentales, les mêmes chiffres apparaissent dans les quatre mêmes zones de 1, 2, 3 et 4 chiffres. La probabilité [5] d'apparition d'un tel phénomène arithmétique est de 1/12600.

Rangs d'apparition ⇒	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1/π = 0,**318**3**09**88**6**183**7**90671**5**37767**5**...										
1/π = 0,**318**3**09**88**6**183**7**90671**5**377675**2**67**4**5	**3**	**1**	**8**	**0**	**9**	**6**	**7**	**5**	**2**	**4**
1/φ = 1,**61803**3**9**88**74**9894848**2**04**5**86834365	**6**	**1**	**8**	**0**	**3**	**9**	**7**	**4**	**2**	**5**
Zones d'apparition ⇒		Zone 2		Zone 1			Zone 4			
	Zone 3									

Fig. 12. Constantes 1/π, et 1/φ : mêmes chiffres dans les 4 zones d'apparition. Probabilité [5] de 1/12600.

Ainsi, les deux plus importantes constantes mathématiques que sont Pi et le Nombre d'Or sont-elles liées par ces phénomènes singuliers. L'ordre d'apparition de leurs décimales n'a donc rien d'aléatoire d'autant que des phénomènes arithmétiques similaires se reproduisent dans d'autres constantes significatives. Le même phénomène se produit (probabilité de 1/12600) entre la constante ζ(5) (Zêta 5) et le nombre $3-\sqrt{5}$, la complémentarité décimale de $\sqrt{5}$:

Rangs d'apparition ⇒	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ζ(5) = 1,**036927**7**5**5**14**33699263313654**8**…	**0**	**3**	**6**	**9**	**2**	**7**	**5**	**1**	**4**	**8**
$3-\sqrt{5}$ = 0,**7639**3**20**22**5**002**1**0303590**8**26**4**3…	**7**	**6**	**3**	**9**	**2**	**0**	**5**	**1**	**8**	**4**
Zones d'apparition ⇒		Zone 2		Zone 1			Zone 4			
	Zone 3									

Fig. 13. Constantes ζ(5) et $3-\sqrt{5}$: mêmes chiffres dans les 4 zones d'apparition. Probabilité [5] de 1/12600.

4. Phénomènes similaires avec d'autres constantes.

4.1. Constantes $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.

Un phénomène similaire apparaît pour les constantes $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$, trois constantes fondamentales des mathématiques : les racines des trois premiers nombres premiers. Comme pour π, dans les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$, les totaux des mêmes groupements décrits plus haut (4 zones d'apparition de chiffres) ont une valeur toujours multiple du même nombre : 3 pour $\sqrt{2}$, 5 pour $\sqrt{3}$ et 9 pour $\sqrt{5}$. Ces trois valeurs différentes sont les trois diviseurs possibles de 45, la somme des dix chiffres du système décimal. La probabilité d'apparition [6] de telles configurations est de 1/18 : seulement 5,55 % de toutes les combinaisons possibles (d'apparition de chiffres) ont ces propriétés. Il est singulier que ce phénomène se produise précisément pour Pi, Phi (leurs inverses) et les racines carrées des trois premiers nombres premiers (le nombre premier suivant possédant cette caractéristique est le nombre 103 situé en 27ème position dans la suite des nombres premiers).

$\sqrt{2}$ = 1,414213562373095048801…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	**1**	**2**	**3**	**5**	**6**	**7**	**0**	**9**	**8**
	3 (1 x 3)		**3** (1 x 3)						
15 (5 x 3)						**24 (8 x 3)**			
21 (7 x 3)									
$\sqrt{3}$ = 1,732050807568877293527446341505…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	**3**	**2**	**0**	**5**	**8**	**6**	**9**	**4**	**1**
	5 (1 x 5)		**0** (0 x 5)						
20 (4 x 5)						**20 (4 x 5)**			
25 (5 x 5)									
$\sqrt{5}$ = 2,2360679774997896964091736 ….5…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	**3**	**6**	**0**	**7**	**9**	**4**	**8**	**1**	**5**
	9 (1 x 9)		**0** (0 x 9)						
18 (2 x 9)						**18 (2 x 9)**			
27(3 x 9)									

Fig. 14. Analyse des constantes $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$: mêmes constructions arithmétiques.

On remarque également l'ordre croissant du diviseur pour ces trois constantes : 3 pour $\sqrt{2}$, 5 pour $\sqrt{3}$ et 9 pour $\sqrt{5}$.

4.2. Variantes des constantes $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

Deux variantes des constantes $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ s'organisent en configurations singulièrement identiques. Leurs quatre zones arithmétiques (identiques à celles définies plus haut) sont des multiples du même diviseur (3) et leur ratio principal est le même (11/4).

1/[(1/$\sqrt{2}$) + 1] = 0,585786437626904951…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	**8**	**7**	**6**	**4**	**3**	**2**	**9**	**0**	**1**
	15 (5 x 3)		**6** (2 x 3)						
12 (4 x 3)						**12** (4 x 3)			
33 (11 x 3)									
1/[(1/$\sqrt{3}$) + 2] = 0,387995381130102064…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**8**	**7**	**9**	**5**	**1**	**0**	**2**	**6**	**4**
	15 (5 x 3)		**9** (3 x 3)						
9 (3 x 3)						**12** (4 x 3)			
33 (11 x 3)									

Fig. 15. Analyse de constantes, variante de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$: mêmes constructions arithmétiques.

4.3. Constante $\sqrt{4{,}5}$.

La somme des dix chiffres du système décimal est de 45, la moyenne de ces dix chiffres est donc 4,5. Des phénomènes remarquables apparaissent dans la constante $\sqrt{4{,}5}$.

$\sqrt{4{,}5}$ = 2,**121**3**2**0**3**4**3**55**96**4257320253308631…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**2**	**3**	**0**	**4**	**5**	**9**	**6**	**7**	**8**
	5 (1 x 5)		**0** (0 x 5)			**30** (6 x 5)			
10 (2 x 5)									
15 (3 x 5)									

Fig. 16. Analyse de la constante $\sqrt{4{,}5}$

Cette constante présente les mêmes phénomènes généraux décrit dans cette note : ratio principal dont les deux quotients (ici 15/30) sont des multiples des diviseurs de 45, mêmes groupements de 1, 2, 3 et 4 chiffres multiples du même diviseur de 45 (ici 5). Mais aussi, deux autres phénomènes singuliers apparaissent :

$\sqrt{4{,}5}$ = 2,12132034355964257320253308…										
rangs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
chiffres	1	2	3	0	4	5	9	6	7	8
somme des valeurs	9 (rangs 5–6)	9 (rangs 4–7)	9 (rangs 3–8)	9 (rangs 2–9)	9 (rangs 1–10)					

Fig. 17. Répartition symétrique des chiffres dans la constante $\sqrt{4{,}5}$. Probabilité de 1/945.

Premier phénomène : les six premiers chiffres (de 0 à 5) du système décimal se trouve précisément dans le groupe des six premiers rangs. La probabilité [3] d'apparition de cette combinaison est de 1/210. Deuxième phénomène : du premier au dixième rang, les chiffres apparaissent de manière parfaitement symétrique en formant des groupes de deux nombres dont le total est toujours égal à 9. La probabilité [7] d'apparition de ce phénomène arithmétique est de 1/945.

4.3.1. Constantes $\sqrt{4{,}5}$ et $((\pi\text{-}2)/\pi)^2$

Dans l'apparition des chiffres de ses décimales, la constante $\sqrt{4{,}5}$ a un arrangement similaire au nombre, dérivé de Pi, $((\pi\text{-}2)/\pi)^2$. Ce nombre est résultat de l'équation : $1-\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{x}+1}{2}$.

Ce nombre n'est pas opportun, cette équation est semblable à l'équation $1+\frac{1}{\varphi}=\frac{\sqrt{x}+1}{2}$ où $x = 5$.

Avec une probabilité [5] de 1/12600, ces deux nombres s'organisent avec les mêmes chiffres dans les quatre zones d'apparition définies :

Rangs d'apparition ⇒	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{4{,}5}$ = 2,121320343559642573…308631…	**1**	**2**	**3**	**0**	**4**	**5**	**9**	**6**	**7**	**8**
$((\pi\text{-}2)/\pi)^2$ = 0,132045189834188399624447…	**1**	**3**	**2**	**0**	**4**	**5**	**8**	**9**	**6**	**7**
Zones d'apparition ⇒	zone 3	zone 2 / zone 3	zone 2 / zone 3	zone 1 / zone 3	zone 3	zone 3	zone 4	zone 4	zone 4	zone 4

Fig. 18. Constantes $\sqrt{4{,}5}$ et $((\pi\text{-}2)/\pi)^2$: mêmes chiffres dans les 4 zones d'apparition. Probabilité [5] de 1/12600.

4.4. Autres constantes remarquables.

Dans la constante $\sqrt{4,5}$, les six premiers chiffres (de 0 à 5) du système décimal se répartissent dans les six premiers rangs d'apparition. Ce phénomène n'a qu'une probabilité de se produire que de 1/210. Cependant on observe le même phénomène dans les cinq autres constantes, variantes de π, décrites figures 18 et 19. Aussi, tout comme dans $\sqrt{4,5}$ ces nombres ont la même propriété d'arrangement en quatre zones arithmétiques multiples d'un diviseur de 45. La probabilité d'un tel arrangement est de 1/1 050 [9] pour chaque nombre. Aussi, avec une probabilité [5] de 1/12600, les constantes $\sqrt{\pi^2+e^2}$ et $11/\pi^2$ ont (comme 1/π et 1/φ) la même répartition de chiffres dans les quatre zones arithmétiques définies.

$^{*}\sqrt{\pi^2+e^2}$ = 4,154354402313313572948…6…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5	4	3	0	2	7	9	8	6
	9 (3 x 3)		**3** (1 x 3)						
		3 (1 x 3)					**30** (10 x 3)		
		15 (5 x 3)							
$11/\pi^2$ = 1,11453302006571548588267409…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	5	3	0	2	6	7	8	9
	9 (3 x 3)		**3** (1 x 3)						
		3 (1 x 3)					**30** (10 x 3)		
		15 (5 x 3)							
$2\left(\sqrt{\pi}/\varphi^2\right)$ = 1,354034255110537068549…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	5	4	0	2	1	7	6	8	9
	9 (3 x 3)		**0** (0 x 3)						
		6 (2 x 3)					**30** (10 x 3)		
		15 (5 x 3)							

Fig.19. Constantes avec six premiers chiffres (de 0 à 5) du système décimal dans le groupe des six premiers rangs. Mêmes zones arithmétiques de 1, 2, 3 et 4 chiffres multiples de 3.

1/(π+1) = 0,241453007005223854655569…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	**4**	**1**	**5**	**3**	**0**	**7**	**8**	**6**	**9**
	5 (1 x 5)		**5** (1 x 5)						
		5 (1 x 5)					**30** (6 x 5)		
		15 (3 x 5)							
$(1/\pi)^3$ = 0,0322515344331994891…6…7…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	**3**	**2**	**5**	**1**	**4**	**9**	**8**	**6**	**7**
	5 (1 x 5)		**5** (1 x 5)						
		5 (1 x 5)					**30** (6 x 5)		
		15 (3 x 5)							

Fig.20. Constantes avec six premiers chiffres (de 0 à 5) du système décimal dans le groupe des six premiers rangs. Mêmes zones arithmétiques de 1, 2, 3 et 4 chiffres multiples de 5.

Avec les constantes $\sqrt{4,5}$ et $((\pi-2)/\pi)^2$, ces cinq autres constantes, variantes dérivées de π, φ et e, ont donc les mêmes six premiers et quatre derniers chiffres. Le nombre 0,0123456789101112… qui est la concaténation de la suite des nombres entiers a bien sûr ses six premières décimales identiques à ces nombres. Dans ce nombre, l'apparition des dix chiffres du système décimal s'organise aussi en quatre mêmes zones arithmétiques précédemment définies :

Concaténation de la suite des nombres entiers = 0,0123456789101112…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	3 (1 x 3)		**3 (1 x 3)**						
		9 (3 x 3)					**30 (10 x 3)**		
		15 (5 x 3)							

Fig.21. Concaténation de la suite des nombres entiers : organisation en quatre zones arithmétiques.

Ce phénomène n'est sûrement pas fortuit et doit être en relation avec le reste des phénomènes présentés dans cet article. Ainsi, le nombre 0,01235711131719…, concaténation de la suite des nombres premiers plus les nombres 0 et 1 s'organise aussi en quatre mêmes zones arithmétiques multiples d'un diviseur de 45 (également 3) :

Concaténation de la suite des nombres premiers + 0 et 1 = 0,0123571113171923293137414347535961677173798…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	**1**	**2**	**3**	**5**	**7**	**9**	**4**	**6**	**8**
	3 (1 x 3)		**3 (1 x 3)**						
		12 (4 x 3)					**27 (9 x 3)**		
		18 (6 x 3)							

Fig.22. Concaténation de la suite des nombres premiers + 0 et 1: organisation en quatre zones arithmétiques.

* Le nombre $\sqrt{\pi^2+e^2}$ est l'hypoténuse d'un triangle ayant pour cotés π et e :

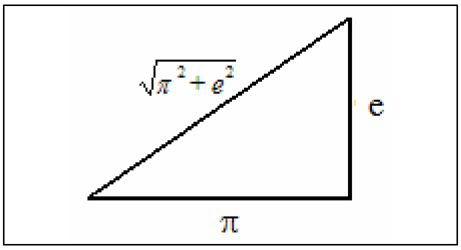


Fig.23. Triangle ayant pour cotés π et e.

Aussi, la valeur du sinus de cet angle (tangente = e/π) possède des propriétés remarquables :

Sinus de l'angle dont la tangente est $\frac{e}{\pi} = \frac{e}{\sqrt{\pi^2+e^2}}$ = 0,654321120736689…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	**7**	**8**	**9**
	9 (3 x 3)		**3 (1 x 3)**						
		9 (3 x 3)					**24 (8 x 3)**		
		21 (7 x 3)							

Fig.24. Sinus de l'angle dont la tangente est e/π.

Dans ce nombre, les apparitions des chiffres se configurent aussi avec les mêmes quatre zones multiples d'un diviseur de 45 (ici 3). Les six premiers et quatre derniers chiffres sont les mêmes que dans la constante $\sqrt{2}$ (probabilité [3] de 1/210). On peut aussi noter l'ordre régulièrement insolite d'apparition des chiffres : de 6 à 0 et de 7 à 9.

5. Autres constantes.

5.1. Constantes à ratio 3/2.

Les complémentarités décimales respectives de π, 1/π, φ et 1/φ sont 4-π, 1-1/π, 2-φ et 1-1/φ. Il est (arithmétiquement) normal, dans ces nombres complémentaires, que les chiffres apparaissent avec les mêmes configurations précédemment décrites de quatre zones multiples de 9 dans un ratio de 3/2. Cependant, il est tout à fait singulier, que les variantes de ces nombres présentées telles que figure 25 présentent toutes un ratio de 3/2 dans l'ordre d'apparition de leurs chiffres :

constantes variantes de π et φ	Ordre d'apparition des 10 chiffres	Répartition (6 et 4 chiffres)	
$(4-\pi)\times(1-1/\pi)$	5 8 1 6 7 0 4 3 2 9	5 8 1 6 7 0	4 3 2 9
$(2-\varphi)\times(1-1/\varphi)$*	1 4 5 8 9 0 3 7 6 2	1 4 5 8 9 0	3 7 6 2
$(4-\pi)^2$	7 3 6 8 1 2 0 4 9 5	7 3 6 8 1 2	0 4 9 5
$(2-\varphi)^2$ *	1 4 5 8 9 0 3 7 6 2	1 4 5 8 9 0	3 7 6 2
$\dfrac{1}{\sqrt{4-\pi}}$	0 7 9 3 2 6 1 8 5 4	0 7 9 3 2 6	1 8 5 4
$\dfrac{1}{\sqrt{2-\varphi}}$ **	6 1 8 0 3 9 7 4 2 5	6 1 8 0 3 9	7 4 2 5

Fig.25. Variantes des complémentarités décimales de π, 1/π, φ et 1/φ : même ratio de 3/2. *De par la spécificité de φ, ces deux variantes sont identiques. ** De par la même spécificité, cette variante est égale à φ.

Les variantes $1/\sqrt{2-\varphi}$ et $1/\sqrt{4-\pi}$ (identiques variantes des complémentarités décimales de φ et π) répartissent respectivement leurs six premiers et quatre derniers chiffres comme dans les décimales de 1/π et de $\sqrt{5}$ (constante d'où est issu φ) : probabilité [3] de1/210. Ces deux combinaisons de six et quatre chiffres (voir plus bas en 5.3) se singularisent par leur forte propension d'apparitions dans l'ensemble des phénomènes présentés dans cet article. Ainsi, deux autres formules, configurations trigonométriques et identiques variantes de Pi et de Phi, présentent un phénomène remarquable. Avec un ratio de 3/2, les apparitions de chiffres du carré du sinus de l'angle dont la tangente égale π et celles du carré du sinus de l'angle dont la tangente égale φ se répartissent aussi respectivement avec les mêmes six premiers et quatre derniers chiffres que les décimales de 1/π et de $\sqrt{5}$ (constante d'où est issu φ) : probabilité [3] de1/210.

Constantes [8]		Ordre d'apparition des 10 chiffres	Répartition	
			6 premiers chiffres	4 derniers chiffres
$\dfrac{\pi^2}{\pi^2+1} \Rightarrow$	$\sin^2$ de l'angle dont la tangente = π	9 0 8 3 1 6 4 2 7 5	9 0 8 3 1 6	4 2 7 5
$\dfrac{\varphi^2}{\varphi^2+1} \Rightarrow$	$\sin^2$ de l'angle dont la tangente = φ	7 2 3 6 0 9 4 8 1 5	7 2 3 6 0 9	4 8 1 5

Fig. 26. Variantes remarquables de Pi et Phi : mêmes six premiers et quatre derniers chiffres que dans 1/π et de $\sqrt{5}$.

5.2. Constantes à quatre zones multiples de 9.

Avec un ratio principal (6 et 4 chiffres classés) de 3/2, dans les constantes, variantes de π, φ et e, présentées figure 27, l'ordre d'apparition des chiffres s'organise dans les mêmes quatre zones arithmétiques multiples de 9 que π et φ (probabilité [4] de 1/420).

Les deux premières variantes de la figure 27 ont les mêmes six premiers et quatre derniers chiffres identiques aux constantes 1/π et 1/φ : probabilité [3] de 1/210. La troisième variante présentée a les mêmes répartition de 6 et 4 chiffres que les constantes $\sqrt{5}$, ζ (5), etc. (probabilité [3] de 1/210). Ces deux répartition de chiffres : 013689/2457 (1/π, 1/φ, etc.) et 023679/1458 ($\sqrt{5}$, ζ (5), etc.) sont anormalement plus fréquentes dans les constantes présentées ici.

Constantes [10]	Ordre d’apparition des 10 chiffres	Répartition : Zones de 1, 2 et 3 chiffres	Répartition : Zone de 4 chiffres
$\left(\pi\sqrt{3}\right)^4$	6 8 1 9 3 0 2 5 7 4	6 81 9 30	2 5 7 4
$\sqrt{4^2+\pi^2}/\pi$ ⇒ 1/cos de l’angle*dont la tangente est 4/π	6 1 8 9 3 0 2 4 7 5	6 18 9 30	2 4 7 5
$\sqrt{e^2+\pi^2}/\pi$ ⇒ 1/cos de l’angle** dont la tangente est e/π	3 2 7 0 6 9 4 8 5 1	3 27 0 69	4 8 5 1
1/4φ	1 5 4 0 8 9 7 3 2 6	1 54 0 89	7 3 2 6
3φ/2	4 2 7 0 5 9 8 3 1 6	4 27 0 59	8 3 1 6
$4/\sqrt{4^2+e^2}$ ⇒ sin de l’angle dont la tangente est 4/e	8 2 7 0 9 1 6 3 5 4	8 27 0 91	6 3 5 4
$2\varphi/\sqrt{(2\varphi)^2+5}$ ⇒ Sin de l’angle dont la tangente est $2\varphi/\sqrt{5}$ ***	8 2 7 0 1 9 3 5 4 6	8 27 0 19	3 5 4 6

Fig. 27 Autres constantes variantes de π, φ et e. * Angle qui donne la quadrature du cercle.**Voir 5.3.*** ou $\left(\sqrt{5}+1\right)/\sqrt{5}$

Les deux premières constantes en figure 27, ont en commun d’avoir les mêmes répartitions d’apparition de chiffres dans leurs quatre zones arithmétiques.

Cette répartition est identique à la valeur 1 – (1/π) qui est le complément à l’unité des décimales de 1/π. Avec une probabilité d’apparition respective [5] de 1/12600, ces trois nombres s’organisent avec les mêmes chiffres dans les quatre zones d’apparition définies. La complémentarité décimale de Phi a bien sûr la même propriété (voir 3.2) :

Rangs d’apparition ⇒	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$(\pi\sqrt{3})^4$ = 876,**681**81**930**60**2**193**5**12**7**96…**4**198…	**6**	**8**	**1**	**9**	**3**	**0**	**2**	**5**	**7**	**4**
$=\sqrt{4^2+\pi^2}/\pi$ = 1,**6189**9**3**1866**0**6**2**32862**4**0**7**6**5**967… (1/cos de l’angle dont la tangente est 4/π)	**6**	**1**	**8**	**9**	**3**	**0**	**2**	**4**	**7**	**5**
1 – (1/π) = 0,**681**6**90**11**3**816**2**09328**4**622324**7**32**5**…	**6**	**8**	**1**	**9**	**0**	**3**	**2**	**4**	**7**	**5**
Zones d’apparition ⇒		zone 2		zone 1			zone 4			
		zone 3								

Fig. 28. Constantes $(\pi\sqrt{3})^4$, $\sqrt{4^2+\pi^2}/\pi^2$ et 1 – (1/π) : mêmes chiffres dans les 4 zones d’apparition.

Aussi, toujours avec la même très faible probabilité [5] de 1/12600, les deux dernières valeurs trigonométriques de la figure 27 ont la même particularité commune :

Rangs d'apparition ⇒	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sin de l'angle dont la tangente est 4/e 0,827091663…70615584…	**8**	**2**	**7**	**0**	**9**	**1**	**6**	**3**	**5**	**4**
Sin de l'angle dont la tangente est $2\varphi/\sqrt{5}$ 0,822701898389593218034076…	**8**	**2**	**7**	**0**	**1**	**9**	**3**	**5**	**4**	**6**
Zones d'apparition ⇒	zone 3	zone 2 (zone 3)		zone 1 (zone 3)	zone 3		zone 4			

Fig. 29. Sinus des angles dont les tangentes sont 4/e et $2\varphi/\sqrt{5}$: mêmes chiffres dans les 4 zones d'apparition.

5.3. Deux combinaisons privilégiées.

En rapprochement des phénomènes présentés en 4.5.1, les deux configurations trigonométriques de la figure 30 (* et ** figure 27), variantes de 1/π, présentent aussi un phénomène commun. Les apparitions de chiffres de l'inverse du cosinus de l'angle dont la tangente égale 4/π et celles de l'inverse du cosinus de l'angle dont la tangente égale e/π se répartissent respectivement avec les mêmes six premiers et quatre derniers chiffres que les décimales de 1/π et de $\sqrt{5}$ (constante d'où est issu φ) : probabilité [3] de1/210.

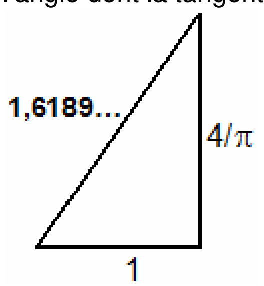
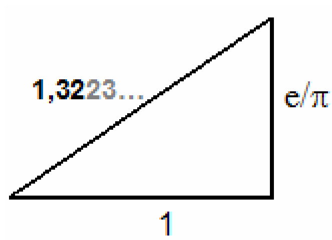
1/cos de l'angle dont la tangente est **4/π**					1/cos de l'angle dont la tangente est **e/π**				
 1,6189…9318660623286240765…					 1,3223…7207696748056509441…				
6	18	9	30	2 4 7 5	3	27	0	69	4 8 1 5

Fig. 30. Mêmes 6 premiers et 4 derniers chiffres que pour 1/π et $\sqrt{5}$. Aussi même organisation en 4 zones multiples de 9.

La probabilité d'apparition d'une combinaison de six et quatre chiffres n'est donc que de 1/210 ce qui fait que 99,52% des combinaisons d'apparition de chiffres n'ont pas la même configuration (de 6 et 4 chiffres). Cependant il ressort, dans les phénomènes présentés dans cet article, que deux combinaisons d'apparitions des chiffres dans les constantes sont beaucoup plus fréquentes que ne le permettent ces probabilités arithmétiques. Ces deux combinaisons de six et quatre chiffres sont (chiffres classés en ordre croissants) :

Six premiers chiffres	Quatre derniers chiffres	constantes
0 2 3 6 7 9	**1 4 5 8**	$\pi^2/(\pi^2+1)$, $\sqrt{5}$, ζ (5), etc.
0 1 3 6 8 9	**2 4 5 7**	$\varphi^2/(\varphi^2+1)$, 1/π, 1/φ, etc.

Fig. 31. Deux combinaisons privilégiées.

Il existe une relation singulière entre Pi et Phi pour l'apparition de ces deux combinaisons privilégiées. En effet, deux séries de deux formules identiques utilisant respectivement π et φ ont leurs apparitions de chiffres inscrites dans ces deux combinaisons (formules présentées plus haut en 5.1) :

$\dfrac{\pi^2}{\pi^2+1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2-\varphi}}$	$\dfrac{\varphi^2}{\varphi^2+1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{4-\pi}}$
Six premiers et quatre derniers chiffres :		Six premiers et quatre derniers chiffres :	
0 2 3 6 7 9	**1 4 5 8**	**0 1 3 6 8 9**	**2 4 5 7**

Fig. 32. Deux séries de deux formules identiques utilisant respectivement π et φ.

Ces deux combinaisons de six et quatre chiffres apparaissent donc dans les variantes de Pi et Phi mais sans respectivité automatique pour Pi ou Phi. En effet, comme il est décrit figure 32, ces deux combinaisons sont interchangeables en rapport à Pi et Phi. Par exemple, trois autres formules en relation avec la trigonométrie et liées soi à Pi soi à $\sqrt{5}$ produisent des nombres ayant l'une ou l'autre des deux combinaisons privilégiées d'apparition de chiffres :

Formule	Nombre	Six premiers chiffres	Quatre derniers chiffres
Le rapport sur 360° de l'angle dont la tangente est $\sqrt{(4/\pi)^2+1}$ * **(1,6189…**9**3**1866**0**6**2**3…**4**0**7**6**5**…)	0,**16**1**9380**8080**4**19**5**3**2**05**7**…	1 6 9 3 8 0	4 5 2 7
Le rapport sur 360° de l'angle dont la tangente est $\sqrt{5}$	0,**183069**881**7**9969**24**97…91**5**…	1 8 3 0 6 9	7 2 4 5
La tangente de l'angle égal à $360° \times \pi$	1,**23**3**7**23**6**…23**0**0**918**7…0**5**02**4**	2 3 7 6 0 9	1 8 5 4

Fig. 33. Formules trigonométriques liées à π et à $\sqrt{5}$. * hypoténuse de l'angle ayant pour tangente $4/\pi$ (voir fig.30).

Chacune de ces deux combinaisons n'a qu'une probabilité d'apparition de 1/210, cependant de nombreuses constantes présentées ici et non toutes liées à Pi ou Phi s'inscrivent dans l'une ou l'autre de ces combinaisons de base (023679/1458 et 013689/2457). Aussi, beaucoup ont une organisation en quatre zones arithmétiques multiples de 9 et un ratio principal (six et quatre chiffres classés) de 3/2. Sur 3 628 800 combinaisons possibles, seulement 1 152 cumulent ces critères pour l'une ou l'autre combinaison de base soit une probabilité de 1 sur 3 150. La figure 34 regroupe les constantes présentées dans cet article et qui possèdent ces propriétés.

Combinaisons	Constantes	Ordre d'apparition des 10 chiffres	Zones d'apparition de 1, 2 et 3 chiffres	Zones d'apparition de 4 chiffres
Constantes à combinaison **023679/1458**	$\sqrt{5}$	2 3 6 0 7 9 4 8 1 5	2 36 0 79	4 8 1 5
	ζ (5) (fonction Zêta 5)	0 3 6 9 2 7 5 1 4 8	0 36 9 27	5 1 4 8
	1/cos de l'angle dont la tangente est e/π	3 2 7 0 6 9 4 8 5 1	3 27 0 69	4 8 5 1
	9876543210/0123456789	0 7 2 9 6 3 8 4 1 5	0 72 9 63	8 4 1 5
Constantes à combinaison **013689/2457**	$1/\pi$	3 1 8 0 9 6 7 5 2 4	3 18 0 96	7 5 2 4
	$1/\varphi$ (ou φ)	6 1 8 0 3 9 7 4 2 5	6 18 0 39	7 4 2 5
	1/cos de l'angle dont la tangente est $4/\pi$	6 1 8 9 3 0 2 4 7 5	6 18 9 30	2 4 7 5
	$(\pi\sqrt{3})^4$	6 8 1 9 3 0 2 5 7 4	6 81 9 30	2 5 7 4

Fig. 34. Deux combinaisons privilégiées : 023679/1458 et 013689/2457.

5.4. Tentative d'explication des phénomènes.

Etude du nombre x, qui est résultat [15] de l'équation* :

$$x^3 - 2x = (2\varphi - 1)^2$$

* qui peut aussi s'écrire : $x^3 - 2x - 5 = 0$

Il ne sera pas démontrer dans cet article le pourquoi des phénomènes présentés. L'auteur n'en a pas trouvé d'explication arithmétique précise. Cependant, des pistes de recherche peuvent être envisagées. Par exemple, nombre de ces arrangements singuliers apparaissent dans des configurations trigonométriques ou/et géométriques. Aussi, l'auteur tente de regrouper les phénomènes en faisant des liens soi avec les configurations d'apparition de chiffres (par exemple : même 6 premiers et 4 derniers chiffres) soi avec la nature des constantes soi aussi avec ces deux paramètres.

Voici donc un exemple de démarche de recherche qui donne d'autres résultats singuliers. Le nombre *x*, qui est résultat [15] de l'équation $x^3 - 2x = (2\varphi - 1)^2$ (présenté plus haut figure 6) produit, par une formule dérivée, un nombre ayant la même organisation de première apparition de chiffres que Pi. Ces deux nombres ont les mêmes chiffres dans les quatre zones d'apparition. Rappelons que la probabilité d'un tel phénomène n'est que de 1/12600 **et** que 99,99 % des combinaisons possibles n'ont pas cette configuration. Ce nombre est $4/x-1$:

Rangs d'apparition ⇒	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
π = 3,14159265358979323846264….9502…	**1**	**4**	**5**	**9**	**2**	**6**	**3**	**8**	**7**	**0**
$4/x-1$ = 3,654464926915…890178227 3…	**6**	**5**	**4**	**9**	**2**	**1**	**8**	**0**	**7**	**3**
Zones d'apparition ⇒		Zone 2		Zone 1			Zone 4			
	Zone 3									

Fig. 35. Constantes π, et variante de *x* ($x \Rightarrow x^3 - 2x = (2\varphi - 1)^2$) : mêmes chiffres dans les 4 zones d'apparition. Probabilité [5] de 1/12600.

Ce résultat est à rapprocher de celui présenté plus bas en 6.1 ou le nombre $4/\mathrm{e}-1$ (rappel : e = constante de Neper) partage le même phénomène avec la fraction non opportune 9876543210/0123456789. Aussi le nombre $\sqrt{x}/(x-1)$ partage le même phénomène avec le nombre $\sqrt{\mathrm{e}^2+\pi^2}/\pi$ (l'inverse du cosinus de l'angle dont la tangente est e/π). Ces deux nombres ont en effet les mêmes chiffres dans leurs quatre zones d'apparition respectives et de plus, leurs six premiers et quatre derniers chiffres sont ceux (tout comme le nombre $4/\mathrm{e}-1$) d'une des deux combinaisons privilégiées décrites au chapitre précédent :

Rangs d'apparition ⇒	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{x}/(x-1)$ = 1,32223706293820613 3…4…5…	**3**	**2**	**7**	**0**	**6**	**9**	**8**	**1**	**4**	**5**
$\sqrt{\mathrm{e}^2+\pi^2}/\pi$ = 1,32237207696748056509441395	**3**	**2**	**7**	**0**	**6**	**9**	**4**	**8**	**5**	**1**
Zones d'apparition ⇒		Zone 2		Zone 1			Zone 4			
	Zone 3									

Fig. 36. Constantes π, et variantes de *x* ($x \Rightarrow x^3 - 2x = (2\varphi - 1)^2$) : mêmes chiffres dans les 4 zones d'apparition. Probabilité [5] de 1/12600.

Aussi, ce nombre *x*, résultat [15] de l'équation $x^3 - 2x = (2\varphi - 1)^2$ engendre d'autres phénomènes insolites. On peut remarquer que dans les deux valeurs figure 37 (présentées plus haut figure 6) les mêmes six premiers et quatre derniers chiffres apparaissent :

Constantes	6 premiers chiffres	4 derniers chiffres
$4\sqrt{\pi}$ = 7,089815403 62…7…	0 8 9 1 5 4	3 6 2 7
$x \Rightarrow [x^3 - 2x - (2\varphi - 1)^2 = 0]$ = 2,094551481542326…7…	0 9 4 5 1 8	2 3 6 7

Fig. 37. constantes à ratio 3/2 avec mêmes six premiers et quatre derniers chiffres

La valeur $4\sqrt{\pi}$ est une valeur géométrique : le périmètre du carré ayant pour surface Pi. La deuxième valeur est algébrique [15] et est résultat de l'équation $x^3 - 2x - (2\varphi - 1)^2 = 0$ (ou $x^3 - 2x - 5 = 0$). En remplaçant, dans cette équation, x par $4\sqrt{\pi}$ puis, pour une deuxième valeur, x par $4\sqrt{1/\pi}$ ont obtient deux autres nombres présentant aussi, dans l'ordre d'apparition des chiffres de leur décimales, un ratio de 3/2 :

Constantes	6 premiers chiffres	4 derniers chiffres
$\left(4\sqrt{\pi}\right)^3-2\left(4\sqrt{\pi}\right)-5$ * = 337,**193**3**60**9**8**998**5**1**7**38798**4**…**2**…	1 9 3 6 0 8	5 7 4 2
$\left(4\sqrt{1/\pi}\right)^3-2\left(4\sqrt{1/\pi}\right)-5$ * = 1,**980**0**5**9**14762**860…611**3**…	9 8 0 5 1 4	7 6 2 3

Fig. 38. constantes variantes de π à ratio 3/2.* 5 = $(2\varphi-1)^2$

Aussi, l'ordre respectif d'apparition pour ces deux nouveaux nombres n'est pas quelconque. La première valeur s'organise avec les mêmes six premiers et quatre derniers chiffres que les constantes 1/π et 1/φ. Ces chiffres s'organisent en quatre zones définies plus haut, multiples d'un diviseur de 45 (ici 3).

Pour la deuxième valeur, les six premiers et quatre derniers chiffres sont identiques aux deux valeurs de base (figure 37). Aussi, on retrouve ces mêmes six premiers et quatre derniers chiffres dans les nombres (décrits plus haut) $(2-\varphi)^2$ et 1/4φ. L'auteur n'explique pas ces phénomènes mais considère qu'ils ne peuvent être opportuns et que ceci est une piste de recherche.

5.5. Autres constantes à quatre zones multiples d'un diviseur de 45.

5.5.1. Variantes de Phi.

Dans des variantes de Phi, dont trois valeurs géométriques, l'apparition des chiffres s'organise aussi, dans les quatre zones arithmétiques (définies plus haut) multiples d'un diviseur de 45 :

circonférence du carré qui a pour surface φ = $4\sqrt{\varphi}$ = 5,**08**80**7**8**59**805**62**758**4**…**1**…**3**…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	**8**	**7**	**5**	**9**	**6**	**2**	**4**	**1**	**3**
	15 (3 x 5)		**5** (1 x 5)			**10 (2 x 5)**			
		15 (3 x 5)							
		35 (7 x 5)							

sin de l'angle dont la tangente est 4/φ = $1/\sqrt{(\varphi/4)^2+1}$ = 0,**9270**2**84**9**1**22**3**9**6**… **5**…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	**2**	**7**	**0**	**8**	**4**	**1**	**3**	**6**	**5**
	9 (3 x 3)		**0** (0 x 3)			**15 (5 x 3)**			
		21 (7 x 3)							
		30 (10 x 3)							

cos de l'angle dont la tangente est φ = $1/\varphi\sqrt{3-\varphi}$ = 0,**52**5**731**…1**9**133**60**6…90**84**…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	**2**	**7**	**3**	**1**	**9**	**6**	**0**	**8**	**4**
	9 (3 x 5)		**3** (1 x 3)			**18 (6 x 3)**			
		15 (5 x 3)							
		27 (9 x 3)							

Fig. 39. Variantes géométriques de φ à 4 zones multiples d'un diviseur de 45.

$3\varphi\sqrt{3-\varphi}$ = 5,70633909777092143269863 60 …5 …									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	0	6	3	9	2	1	4	8	5
	6 (2 x 3)		3 (3 x 3)						
		18 (6 x 3)					18 (6 x 3)		
		27 (9 x 3)							

$\varphi/\sqrt{4-\varphi}$ = 1,04838273475037706 59…1…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	4	8	3	2	7	5	6	9	1
	9 (4 x 3)		3 (1 x 3)						
		9 (3 x 3)					18 (6 x 3)		
		27 (9 x 3)							

Fig. 40. Autres variantes de φ à 4 zones multiples d'un diviseur de 45.

5.5.2. Autres constantes.

D'autres constantes mathématiques organisent aussi la première apparition de leurs chiffres dans les quatre mêmes zones (précédemment décrites) multiples d'un diviseur de 45 :

constante de Landau-Ramanujan de second ordre : 0,581948659317290…	5	81	9	46	3720
dimension fractale de l'ensemble de Cantor (log2/log3) : 0,63092975357 14…8…	6	30	9	27	5148
zone fractionnelle d'un triangle de Reuleaux : 0,987700390736053460 1312…	9	87	0	36	5412
moyenne harmonique de Khintchine 1,745405662407346863 4945…1…	7	45	0	62	3891
constante de Lemniscate : 5,2441151085842396209 2967…	2	41	5	08	3967

Fig.41 Constantes à 4 zones multiples d'un diviseur de 45.

Aussi des variantes remarquables du nombre 8 (2^3) :

$2^3/3^{3/2} \Rightarrow$ 1,5396007178390020386910634…	5	39	6	07	1824
$(2^3/3)^{3/2} \Rightarrow$ 4,35464843161453884123961…057…	3	54	6	81	2907
$3\pi/2^3 \Rightarrow$ 1,1780972450961724644 23…	1	78	0	92	4563
$2^3/3\pi \Rightarrow$ 0,8488263631567751 2410…	8	42	6	31	5720
$3/2^3\pi \Rightarrow$ 0,1193662073189215…4…	1	93	6	20	7854
$\left(\sqrt{2^3}-1\right)^2 \Rightarrow$ 3,3431457505076198047932…	3	41	5	70	6982

Fig.42 Variantes remarquables du nombre 8 (2^3) à 4 zones multiples d'un diviseur de 45.

Aussi deux variantes de la dimension fractale de l'ensemble de Cantor (log2/log3), une variante de Pi et la fraction 631764/13467 :

$(\log 3/\log 2)^{\log 2/\log 3} \Rightarrow$ 1,33720481901228004 4765…$\Rightarrow$	3	72	0	48	1965
$(\log 3/\log 2)^{\log 4/\log 3} \Rightarrow$ 1,788116727989665 70…43…$\Rightarrow$	7	81	6	29	5043
$1/(\pi^2-\pi) \Rightarrow$ 0,14863232074046918844 5… $\Rightarrow$	1	48	6	32	0795
631764/13467 $\Rightarrow$ 46,912007128 5364…$\Rightarrow$	9	12	0	78	5364

631764 est un nombre de Kaprekar et le nombre 13467 est le nombre obtenu en classant les chiffres qui le composent (chiffres pris une seule fois). Aussi, ce nombre s'organise avec un ratio 3/2 (27/18), tout comme le nombre 1467/6174, autre fraction intégrant un nombre de Kaprekar décrit plus haut figure 6.

6. Variantes de e (constante de Neper).

6.1. Variantes de e.

Dans deux variantes de e décrites plus haut, $\sqrt{e^2+\pi^2}/\pi$ (inverse du sinus de l'angle ayant pour tangente e/π) et $4/\sqrt{4^2+e^2}$ (sinus de l'angle dont la tangente est 4/e), la première apparition des chiffres s'organise en quatre zones multiples de 9 dans un ratio de 3/2.

La première variante a les mêmes six premiers et quatre derniers chiffres que l'une des deux combinaisons privilégiées décrites au chapitre 5. La variante 4/(e-1) a exactement les mêmes propriétés :

$\frac{4}{e-1}$ = 2,**3279068**27**4**7730**5**697540008**1**…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**2**	**7**	**9**	**0**	**6**	**8**	**4**	**5**	**1**
	9 (1 x 9)		**9 (1 x 9)**						
9 (1 x 9)						**18 (2 x 9)**			
27 (3 x 9)									

Fig. 43. Constante 4/(e-1), variante de e à quatre zones multiples de 9 et combinaison privilégiée.

Aussi, avec une probabilité de seulement 1/12600, la variante 4/(e-1) distribue les mêmes chiffres dans les quatre zones définies que la fraction non opportune 9876543210/0123456789 :

Rangs d'apparition ⇒	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4/(e-1) 2,**3279068**27**4**7730**5**697540008**1**…	**3**	**2**	**7**	**9**	**0**	**6**	**8**	**4**	**5**	**1**
9876543210/0123456789 80,**0**..00**729**0..0**6**6**3**39000…**84**9**1**…**5**…	**0**	**7**	**2**	**9**	**6**	**3**	**8**	**4**	**1**	**5**
Zones d'apparition ⇒		zone 2		zone 1			zone 4			
	zone 3									

Fig. 44. Constante 4/(e-1) et fraction 9876543210/0123456789 : mêmes chiffres dans les 4 zones d'apparition.

Aussi, les variantes 4/(e+1) et 1/(e-1) s'organisent en quatre zones arithmétiques multiples d'un diviseur de 45. La variante 1/(e-1) s'organise en zones multiples de 9 dont la probabilité [11] d'apparition n'est que de 1/350 :

$\frac{4}{e+1}$ = 1,**075**7**6**56**8**5**4**7**9**98048**2**995**3**630…**1**…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	**7**	**5**	**6**	**8**	**4**	**9**	**2**	**3**	**1**
	12 (4 x 3)		**6 (2 x 3)**						
12 (4 x 3)						**15 (5 x 3)**			
30 (10 x 3)									
$\frac{1}{e-1}$ = 0,**581976**7**0**6869**32**6**4**…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	**8**	**1**	**9**	**7**	**6**	**0**	**3**	**2**	**4**
	9 (1 x 9)		**9 (1 x 9)**						
18 (2 x 9)						**9 (1 x 9)**			
36 (4 x 9)									

Fig. 45. Constante 4/(e+1) et 1/(e-1) : variantes de e à quatre zones multiples d'un diviseur de 45.

La constante e a donc trois variantes dont la première apparition des chiffres des décimales s'organise en quatre zones arithmétiques multiples de 9 (avec ratio de 3/2) précédemment définies :

<table>
<tr><td rowspan="2">Constantes
Variantes de e</td><td rowspan="2">Ordre d'apparition des 10 chiffres</td><td colspan="2">Répartition</td></tr>
<tr><td>Zones de 1, 2 et 3 chiffres</td><td>Zone de 4 chiffres</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{e^2+\pi^2}/\pi$</td><td>3 2 7 0 6 9 4 8 5 1</td><td>3 | 27 | 0 | 69</td><td>4 8 5 1</td></tr>
<tr><td>$4/\sqrt{4^2+e^2}$</td><td>8 2 7 0 9 1 6 3 5 4</td><td>8 | 27 | 0 | 91</td><td>6 3 5 4</td></tr>
<tr><td>$\frac{4}{e-1}$</td><td>3 2 7 9 0 6 8 4 5 1</td><td>3 | 27 | 9 | 06</td><td>8 4 5 1</td></tr>
</table>

Fig. 46. Trois nombres, variantes de la constante e, à quatre zones multiples de 9 et ratio 3/2.

Il paraît peu vraisemblable aux vues des nombreux autres phénomènes présentés dans cet article que ces trois arrangements soient fortuits.

6.2. Variante intégrant Pi, Phi, e et i.

Il a été démontré plus haut que, dans de nombreuses variantes de Pi, Phi et e, la première apparition des chiffres des décimales s'organise en deux zones arithmétiques privilégiées (voir 5.3) dans un ratio de 3/2.

Une formule intégrant ces trois constantes produit un nombre dont la première apparition des chiffres des décimales s'organise en deux zones arithmétiques ayant justement l'une de ces deux combinaisons de chiffres. Dans cette constante, les six premiers et quatre derniers chiffres sont identiques au constantes $1/\pi$ et $1/\varphi$.

Aussi, cette formule intégrant π, φ, e mais aussi le nombre imaginaire i, quatre constantes mathématiques fondamentales, produit un nombre dont la première apparition des chiffres des décimales s'organise dans les quatre mêmes zones arithmétiques multiples d'un diviseur de 45 que celles définies plus haut. C'est la formule, variante d'une fraction continue de Rogers-Ramanujan :

<table>
<tr><td colspan="10">$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\dots}}} = e^{2\pi/5}\left(\sqrt{\varphi+2}+i^2\varphi\right)$$
= 0,**9**9**81360445**9850933**2**149891…**7**…</td></tr>
<tr><td colspan="10">$e^{2\pi/5}\left(\sqrt{\varphi+2}+i^2\varphi\right)$ = 0,**9**9**81360445**9850933**2**149891…**7**…</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>**9**</td><td>**8**</td><td>**1**</td><td>**3**</td><td>**6**</td><td>**0**</td><td>**4**</td><td>**5**</td><td>**2**</td><td>**7**</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">**9** **(3 x 3)**</td><td>**3** **(1 x 3)**</td><td colspan="2"></td><td colspan="4" rowspan="3">**18 (6 x 3)**</td></tr>
<tr><td colspan="6">**15 (5 x 3)**</td></tr>
<tr><td colspan="6">**27 (9 x 3)**</td></tr>
</table>

Fig. 47. Constante intégrant Pi, Phi, e et i : mêmes six premiers et quatre derniers chiffres que $1/\pi$ et $1/\varphi$; mêmes quatre zones multiples d'un même diviseur de 45 que $1/\pi$ et $1/\varphi$.

Par soucis de simplification des prochaines démonstrations, nous allons nommer *r* (r comme Rogers et Ramanujan) cette formule intégrant quatre constantes mathématiques fondamentales.

De nombreux nombres dérivés de cette formule produisent des phénomènes semblables à ceux décrits dans l'ensemble de cet article. Ainsi, le nombre $\sqrt{r}/\varphi^2$ a la même organisation arithmétique que *r* et ses six premiers et quatre derniers chiffres sont identiques à *r* (et à $1/\pi$,$1/\varphi$, etc.). Toujours avec un ratio de 3/2 et une organisation en quatre zones arithmétiques définies plus haut, le nombre $\sqrt[4]{r}/\pi$ décrit des arrangements semblables :

$r = e^{2\pi/5}\left(\sqrt{\varphi+2}+i^2\varphi\right) =$ 0,998136044598509332149891…7…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	**8**	**1**	**3**	**6**	**0**	**4**	**5**	**2**	**7**
	9 (3 x 3)		**3** (1 x 3)						
15 (5 x 3)						**18 (6 x 3)**			
27 (9 x 3)									
$\frac{\sqrt{r}}{\varphi^2}$ = 0,3816098614059124221…7…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**8**	**1**	**6**	**0**	**9**	**4**	**5**	**2**	**7**
	9 (3 x 3)		**6** (2 x 3)						
12 (4 x 3)						**18 (6 x 3)**			
27 (9 x 3)									
$\frac{\sqrt[4]{r}}{\pi}$ = 0,31816145353335986355711429870…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**1**	**8**	**6**	**4**	**5**	**9**	**7**	**2**	**0**
	9 (3 x 3)		**6** (1 x 3)						
12 (4 x 3)						**18 (6 x 3)**			
27 (9 x 3)									

Fig. 48. r et deux variantes à quatre zones multiples du même diviseur de 45.

Les six nombres φ/r , $r\times\varphi$, φ/r^2 , r/φ^4 , $\varphi/\sqrt{r}$ et $\varphi/\sqrt[3]{r}$, tous variantes dérivées de r, ont la première apparition des chiffres des décimales organisée en quatre zones arithmétiques multiples d'un diviseur de 45 :

Constantes [13]	Ordre d'apparition des 10 chiffres	Répartition				
		Zones de 1, 2 et 3 chiffres				Zone de 4 chiffres
$\frac{\varphi}{r}$	6 2 1 0 5 4 7 9 8 3	6	2 1	0	5 4	7 9 8 3
$r\times\varphi$	6 1 5 0 8 4 7 9 2 3	6	1 5	0	8 4	7 9 2 3
$\frac{\varphi}{r^2}$	6 2 4 0 8 7 1 9 3 5	6	2 4	0	8 7	1 9 3 5
$\frac{r}{\varphi^4}$	1 4 5 6 2 0 8 3 9 7	1	4 5	6	2 0	8 3 9 7
$\frac{\varphi}{\sqrt{r}}$	6 1 9 5 4 0 7 2 3 8	6	1 9	5	4 0	7 2 3 8
$\frac{\varphi}{\sqrt[3]{r}}$	6 1 9 0 4 5 2 3 8 7	6	19	0	4 5	2 3 8 7

Fig. 49. Six variantes dérivées de r organisées en quatre zones arithmétiques multiples d'un diviseur de 45.

Rappelons que seulement une combinaison d'apparition de chiffres sur dix-huit a cette propriété et que 94,44 % des combinaisons possibles n'ont pas cette configuration. Aussi, les deux derniers nombres présentés figure 45 s'organisent, avec une probabilité [3] de 1/210, avec les mêmes six premiers et quatre derniers chiffres.

7. Phi+ : un nombre cousin de Phi.

Un nombre, variante du Nombre d'Or (Phi), a des propriétés remarquables et directement en relations avec les phénomènes présentés plus haut. Le Nombre d'Or est donné par cette formule :

$$\frac{\sqrt[2]{5}+1}{2}$$

En remplaçant, dans cette formule, la racine carrée de 5 par la racine cubique de 5 on obtient le nombre :

$$\frac{\sqrt[3]{5}+1}{2} = 1{,}\mathbf{354987}9733383484946765544362719\ldots\mathbf{0}\ldots$$

Ce nombre possède les mêmes arrangements arithmétiques que Phi : dans ce nombre, les apparitions des chiffres s'organisent dans les quatre mêmes zones d'apparition (décrites plus haut) pour former des sommes dont les valeurs sont multiples de 9. La probabilité [11] que les apparitions de chiffres s'organisent en ces quatre zones multiples de 9 est de seulement 1/350. 99,71 % de toutes les combinaisons possibles d'apparition des dix chiffres du système décimal n'ont pas cet arrangement arithmétique. Il est donc très insolite et peu opportun que Phi [($\sqrt[2]{5}$ +1)/2] et Phi+* [($\sqrt[3]{5}$ +1)/2] possèdent simultanément ces propriétés.

($\sqrt[3]{5}$ +1)/2 = 1,**354987**9733383484946765544362719…**0**									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**5**	**4**	**9**	**8**	**7**	**6**	**2**	**1**	**0**
	9 (1 x 9)		**9** (1 x 9)						
		18 (2 x 9)					**9 (1 x 9)**		
		36 (4 x 9)							

Fig. 50. ($\sqrt[3]{5}$ +1)/2 ou φ_+ [12].

*Nous appelons provisoirement [12] ce nombre Phi+ et l'écrivons φ_+. Ce nombre engendre d'autres nombres remarquables dans de nombreuses formules dérivés. Les variantes de ce nombre présentées ci dessous ont les mêmes arrangements singuliers que ceux décrits plus haut dans l'article. Beaucoup de ces variantes ont des relations insolites avec Pi et Phi (le Nombre d'Or).

7.1. Formule $2(\varphi_+^2 + \varphi_+)$.

Ainsi, la formule $2(\varphi_+^2 + \varphi_+)$ donne le nombre :

6,38196076245982701145961142515 67…

Ce nombre à la même organisation d'apparition de chiffres en quatre zones multiples de 9 et un ratio de 3/2 que $1/\pi$ et $1/\varphi$ (probabilité [4] de 1/420). Aussi, dans cette répartition, ses six premiers et quatre derniers chiffres sont les mêmes que dans $1/\pi$ et $1/\varphi$ (probabilité [3] de 1/210).

$2(\varphi_+^2 + \varphi_+)$ = 6,**38196076**6**245**…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	**8**	**1**	**9**	**6**	**0**	**7**	**2**	**4**	**5**
	9 (1 x 9)		**9** (1 x 9)						
		9 (2 x 9)					**18 (2 x 9)**		
		27 (3 x 9)							

Fig. 51. formule $2(\varphi_+^2 + \varphi_+)$

Aussi, avec une probabilité [5] de 1/12600, ce nombre s'organise avec les mêmes apparitions de chiffres dans les quatre zones d'apparition que les nombres $1-(1/\pi)$, $(\pi\sqrt{3})^4$ et l'inverse du cosinus de l'angle dont la tangente égale $4/\pi$ (trois nombres décrits plus haut en 5.2).

7.2. Formule $8 - 2(\varphi_+^2 + \varphi_+)$.

En retranchant le nombre $2(\varphi_+^2 + \varphi_+)$ du second nombre entier supérieur (8) on obtient un nombre extrêmement semblable au Nombre d'Or* (mais qui n'est pas le Nombre d'Or) :

$$8 - 2(\varphi_+^2 + \varphi_+) = 1{,}6180392375401729885403885748433\ldots$$

*φ = 1,6180339887498948482045868343656 4…

Ce nombre s'organise, dans l'apparition des chiffres, exactement comme le Nombre d'Or :

$8 - 2(\varphi_+^2 + \varphi_+)$ = 1,61803923754…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	**1**	**8**	**0**	**3**	**9**	**2**	**7**	**5**	**4**
	9 (1 x 9)		**0** (0 x 9)						
		18 (2 x 9)					**18 (2 x 9)**		
		27 (3 x 9)							
φ = 1,6180339887498948482045868…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	**1**	**8**	**0**	**3**	**9**	**7**	**4**	**2**	**5**
	9 (1 x 9)		**0** (0 x 9)						
		18 (2 x 9)					**18 (2 x 9)**		
		27 (3 x 9)							

Fig. 52. Formule $8 - 2(\varphi_+^2 + \varphi_+)$: nombre extrêmement semblable au Nombre d'or.

Ainsi, une variante de Phi+ [12] produit un nombre quasi identique à Phi, dont l'apparition des chiffres de ses décimales est quasi identique à Phi, mais qui est différent de Phi. Ce phénomène renforce l'idée que l'organisation des apparitions de chiffres dans les constantes fondamentales n'est pas fortuite.

7.3. Formule $1 - (1/\sqrt[3]{5})$.

La formule $1 - (1/\sqrt[3]{5})$ donne un nombre dont l'organisation des apparitions de chiffres est très proche de Pi :

$$1 - \frac{1}{\sqrt[3]{5}} = 0{,}4151964523574267868\ldots0\ldots$$

Ce nombre a les mêmes apparitions de six premiers et quatre derniers chiffres que Pi. Aussi, il s'organise comme Pi en quatre zones multiples de 3 :

$1 - (1/\sqrt[3]{5})$ = 0,4151964523574267868…0…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	**1**	**5**	**9**	**6**	**2**	**3**	**7**	**8**	**0**
	6 (2 x 3)		**9** (3 x 3)						
		12 (4 x 3)					**18 (6 x 3)**		
		27 (9 x 3)							
π = 3,14159265358979323846264338327950 2…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**4**	**5**	**9**	**2**	**6**	**3**	**8**	**7**	**0**
	9 (3 x 3)		**9** (3 x 3)						
		9 (3 x 3)					**18 (6 x 3)**		
		27 (9 x 3)							

Fig. 53. formule $1 - (1/\sqrt[3]{5})$ et π : très proche organisation des apparitions de chiffres.

7.4. Formule $1 - (\sqrt[3]{5}/2)$.

La formule $(\sqrt[3]{5}/2)$, formule proche de Phi+, donne le nombre :

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{2} = 1{,}8549879733383484946765544362719\ldots0$$

Ce nombre à la même organisation d'apparition de chiffres en quatre zones multiples de 9 que Phi+.

La formule $1 - (\sqrt[3]{5}/2)$ donne un nombre dont l'organisation des apparitions de chiffres est très proche de Pi :

$1 - (\sqrt[3]{5}/2)$ = **0,1450**1**2**02**6**6…505**3**2…63**7**2**8**07…**9**…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**4**	**5**	**0**	**2**	**6**	**3**	**7**	**8**	**9**
	9 (1 x 9)		**0 (0 x 9)**						
		9 (1 x 9)					**27 (3 x 9)**		
		18 (2 x 9)							
π = 3,**14**1**5926**5**3**5**8**9**7**9323846264338327950**2**…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**4**	**5**	**9**	**2**	**6**	**3**	**8**	**7**	**0**
	9 (1 x 9)		**9 (1 x 9)**						
		9 (1 x 9)					**18 (2 x 9)**		
		27 (3 x 9)							

Fig. 54. Formule $1 - (\sqrt[3]{5}/2)$ et π : très proche organisation des apparitions de chiffres.

Aussi, avec une probabilité [5] de 1/12600, ce nombre $1 - (\sqrt[3]{5}/2)$ s'organise avec exactement les mêmes quatre zones de chiffres que le nombre $3/[(4/\pi)^2 +1]$, une variante de Pi dont l'organisation des apparitions de chiffres est aussi très proche de Pi :

Rangs d'apparition ⇒	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$1 - (\sqrt[3]{5}/2)$ = **0,1450**1**2**02**6**6…505**3**2…63**7**2**8**07…**9**…	**1**	**4**	**5**	**0**	**2**	**6**	**3**	**7**	**8**	**9**
$3/[(4/\pi)^2 +1]$ = 1,**144**4**5**4**062**552**3**4**9**1215**87**…	**1**	**4**	**5**	**0**	**6**	**2**	**3**	**9**	**8**	**7**
Zones d'apparition ⇒		Zone 2		Zone 1			Zone 4			
	Zone 3									

Fig. 55. $1 - (\sqrt[3]{5}/2)$ et $3/[(4/\pi)^2 +1]$: même organisation des apparitions de chiffres. Probabilité [5] de 1/12600.

Ce nombre $3/[(4/\pi)^2 +1]$ n'est pas opportun. Un nombre dont la formule est très voisine a ses apparitions de chiffres organisées en une configuration singulièrement proche. Ce nombre est $4/[(4/\pi)^2 +1]$:

$4/[(4/\pi)^2 +1]$ = 1,**5260**5**41**6**73**64654**9**5449597923918**8**…									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	**2**	**6**	**0**	**4**	**1**	**7**	**3**	**9**	**8**
			0 (0 x 9)						
		18 (2 x 9)					**27 (3 x 9)**		
		18 (2 x 9)							

Fig. 56. $4/[(4/\pi)^2 +1]$: configuration singulièrement proche de $3/[(4/\pi)^2 +1]$ (voir Fig. 55).

7.5. Autres formules dérivées de Phi+.

Les formules $\varphi_+^2 - \varphi_+$ et $1/(\varphi_+^2 - \varphi_+)$ s'organisent, dans l'apparition de leurs chiffres (probabilité [6] de 1/18), en quatre zones multiples d'un diviseur de 45 (ici 3):

$\varphi_+^2 - \varphi_+ = 0{,}48100443455321651637669\ldots$									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	**8**	**1**	**0**	**3**	**5**	**2**	**6**	**7**	**9**
	9 (3 x 3)		**0** (0 x 3)						
12 (4 x 3)						**24 (8 x 3)**			
21 (7 x 3)									

$1/(\varphi_+^2 - \varphi_+) = 2{,}07898291193272516871205528714\ldots$									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	**7**	**8**	**9**	**2**	**1**	**3**	**5**	**6**	**4**
	15 (5 x 3)		**9** (3 x 3)						
3 (1 x 3)						**18 (3 x 9)**			
27 (3 x 9)									

Fig. 57. formule $\varphi_+^2 - \varphi_+$ et $1/(\varphi_+^2 - \varphi_+)$.

Avec la même probabilité [6] d'apparition de 1 sur 18, les formules, variantes de Phi+, présentées figure 58 s'organisent avec les mêmes configurations en quatre zones multiples d'un diviseur de 45 :

Constantes	Zones de 1, 2 et 3 chiffres	Zone de 4 chiffres
$\frac{1}{\varphi_+^5}$ = 0,21893883232376394302636…5…	2 | 1 8 | 9 | 3 7	6 4 0 5
$\frac{1}{(\varphi_+ - 1)^5}$ = 177,391089444532774546…	3 | 9 1 | 0 | 8 4	5 2 7 6
$\frac{(\varphi_+ - 1)^5}{\varphi_+^5}$ = 0,00123421550095…05825…370…6…	0 | 1 2 | 3 | 4 5	9 8 7 6

Fig. 58. Autres formules dérivées de φ_+.

La dernière formule $(\varphi_+ - 1)^5/\varphi_+^5$, ratio des deux premières, a les mêmes six premiers et quatre derniers chiffres que la constante $\sqrt{4{,}5}$ et autres nombres présentés en 4.4 qui, rappelons le répartissent leurs six premiers chiffres de 0 à 5 et les quatre derniers de 6 à 9.

On peut aussi noter l'ordre régulièrement insolite d'apparition des chiffres pour cette formule : 0-1-2-3-4-5 et 9-8-7-6. Ce qui fait que ce nombre a les mêmes chiffres dans les quatre zones arithmétiques définies (probabilité [5] de 1/12600) que la concaténation (présentée en 4.4) de la suite des nombres entiers (0,01234567891011…).

La formule $\varphi_+^2/(\varphi_+^2 - 1)$, avec une probabilité [3] de 1/210, a les mêmes apparitions de six et quatre chiffres que de nombreuses constantes présentées plus haut dans cet article dont 1/Pi, Phi, etc. Cette formule est à rapprocher de la formule trigonométrique $\pi^2/(\pi^2 + 1^2)$ présentée plus haut en 5.1. Aussi, cette formule peut s'écrire avec le nombre imaginaire i :

$$\frac{\varphi_+^2}{\varphi_+^2 + i^2}$$

Constantes	Six premiers chiffres	Quatre derniers chiffres
$\varphi_+^2/(\varphi_+^2 + i^2)$ = 2,196183111190417…2…5…	1 9 6 8 3 0	4 7 2 5
$\pi^2/(\pi^2 + 1^2)$ = 0,90800033164962476754 4…	9 0 8 3 1 6	4 2 7 5

Fig. 59. Deux formules proches avec mêmes répartitions en six et quatre chiffres.

7.6. Phi+ et ''The hard hexagon constant''.

Le nombre $(\sqrt[3]{5}+1)/2$ (Phi+) et $\sqrt[4]{5}$ s'organisent avec les mêmes six premiers et quatre derniers chiffres. Aussi, cette combinaison de six et quatre chiffres est la même que dans ''The hard hexagon constant'' [14]:

Constantes	Six premiers chiffres	Quatre derniers chiffres
Phi+ = $(\sqrt[3]{5}+1)/2$ = 1,3549879…946765…362719…0	3 5 4 9 8 7	6 2 1 0
$\sqrt[4]{5}$ = 1,495348781221220541911…6…	4 9 5 3 8 7	1 2 0 6
Hard hexagon constant = 1,395485972479302…006…1…	3 9 5 4 8 7	2 0 6 1

Fig. 60. Trois constantes avec même combinaison de six et quatre chiffres.

Remarque : dans la racine carrée de ''The hard hexagon constant'' [14] (1,181306891742913 15…), apparaissent les mêmes six premiers et quatre derniers chiffres que dans les nombres 1/π et φ (une des deux combinaisons privilégiées d'apparitions décrites plus haut en 5.3).

7.7. Phi+, Phi et e.

Des variantes de Phi+ associé à Phi présentent d'autres phénomènes singuliers dont des similitudes insolites à des variantes de la constante e (constante de Neper) :

constante	valeur	6 premiers chiffres	4 derniers chiffres
$\dfrac{\varphi}{\sqrt{\varphi_+}}$	= 1,39001638632480395…7… ⇒	390168	2457
	Ratio de 3/2. Mêmes 6 premiers et 4 derniers chiffres que 1/π, 1/φ, etc.		
$\sqrt{\dfrac{\varphi}{\sqrt{\varphi_+}}}$	= 1,178989561584 32…0… ⇒	1 78 9 56	4320
⇓	Organisation en 4 zones multiples d'un diviseur de 45. Mêmes 6 premiers et 4 derniers chiffres que :		⇓
$\dfrac{1}{e-1}$	= 0,581976706869326 4… ⇒	5 81 9 76	0324
$\dfrac{1}{1-\sqrt{\dfrac{\varphi}{\sqrt{\varphi_+}}}}$	= 1,2180113104648564458 39…7… ⇒	2 18 0 34	6597
⇓	Organisation en 4 zones multiples d'un diviseur de 45. Mêmes 6 premiers et 4 derniers chiffres et mêmes chiffres dans les 4 zones d'apparition que :		⇓
$1-\dfrac{1}{e-1}$	= 0,41802329313067 35… ⇒	4 18 0 23	9675
$1-\sqrt{\dfrac{\varphi}{\sqrt{\varphi_+}}}$	= 0,8210104384156728…9… ⇒	8 21 0 43	5679
⇓	Mêmes 6 premiers et 4 derniers chiffres que son inverse :		⇓
$\dfrac{1}{1-\sqrt{\dfrac{\varphi}{\sqrt{\varphi_+}}}}$	= 1,2180113104648564458 39…7… ⇒	2 18 0 34	6597

Fig .61. Variantes de Phi+.

8. Autres constatations.

Afin de ne pas surcharger cet article par trop de démonstrations, l'auteur n'a présenté ici que les constatations les plus significatives en relation avec les phénomènes décrits. Voici juste quelques exemples d'investigations renforçant l'idée que la première apparition des chiffres des décimales de constantes remarquables n'est pas fortuite.

8.1. Constante de Landau-Ramunujan.

La constante de Landau-Ramunujan s'organise [1] avec un ratio de 3/2 (27/18). Trois variantes de cette constante ont la même propriété dont la constante C^2 qui s'organise de plus en quatre zones arithmétiques multiples d'un diviseur de 45 :

Constantes	Six premiers chiffres	Quatre derniers chiffres
Constante de Landau-Ramanujan = C = 0,**7642**2**3**6**5**35**89**22**0**66299…**1**…	7 6 4 2 3 5	8 9 0 1
$\frac{3C}{2}$ = 1,**1463**3**5**4**80**383830**9**944860…**2**…**7**…	1 4 6 3 5 8	0 9 2 7
$\frac{1C}{2}$ = 0,**3821**1182**6794**61**0**33149**5**…	3 8 2 1 6 7	9 4 0 5
C^2 = 0,**584037**7**92**7052571**4**4433484836**6**…	5 $\boxed{8\ 4}$ $\boxed{0}$ 3 7	9 2 1 6

Fig. 62. Constante de Landau-Ramunujan et trois variantes avec ratio 3/2 (27/18).

8.2. Nombre 33 et Pi.

L'ordre de la première apparition des dix chiffres de la racine carrée du nombre 33 forme quatre zones arithmétiques précédemment définies (multiples d'un diviseur de 45). En association à Pi, ce nombre en produit d'autres ayant les mêmes caractéristiques :

Constantes	Ordre d'apparition des 10 chiffres	Répartition : Zones de 1, 2 et 3 chiffres	Répartition : Zone de 4 chiffres
$\sqrt{33}$ = 5,7445626465380286598506114682…	7 4 5 6 2 3 8 0 9 1	7 $\boxed{4\ 5}$ $\boxed{6}$ 2 3	8091
$\sqrt{33}/\pi^2$ = 0,58204588685479348660096013725…	5 8 2 0 4 6 7 9 3 1	5 $\boxed{8\ 2}$ $\boxed{0}$ 4 6	7931
$\pi^2/\sqrt{33}$ = 1,7180775993516745836069264697…	7 1 8 0 5 9 3 6 4 2	7 $\boxed{1\ 8}$ $\boxed{0}$ 5 9	3642
$\left(\sqrt[2]{33}/\pi\right)^2$ = 3,343599060197146457648022285…	3 4 5 9 0 6 1 7 8 2	3 $\boxed{4\ 5}$ $\boxed{9}$ 0 6	1782
$\left(\sqrt[3]{333}/\pi\right)^3$ = 10,739760966255429898412543545…	7 3 9 6 0 2 5 4 8 1	7 $\boxed{3\ 9}$ $\boxed{6}$ 0 2	5481

Fig. 63. Variantes* dérivées de $\sqrt{33}$ à quatre zones arithmétiques multiples d'un diviseur de 45.

* La dernière formule figure 61 n'est pas une variante de 33 mais sa construction arithmétique $\left(\sqrt[3]{333}/\pi\right)^3$ est proche de la formule $\left(\sqrt[2]{33}/\pi\right)^2$. Aussi, dans ce nombre, les six premières et quatre dernières apparitions de chiffres sont les mêmes qu'une des deux combinaisons privilégiées décrites plus haut en 5.3.

8.3. Ratio 1/7.

De nombreux nombres rationnels sont formés d'une suite de décimales répétitives, c'est là une de leurs caractéristiques. Très souvent cette suite répétitive est constituée de chiffres dont le total est multiple de 9. Le premier rationnel (parmi l'inverse des nombres entiers) à être formé d'une telle suite est le nombre 1/7 dont la suite répétitive de ses décimales est formé par les chiffres 1-4-2-8-5-7 (1/7 = 0,142857142857…). L'addition de ces six chiffres différents donne 27 et l'addition des quatre chiffres manquants (0-3-6-9) donne 18. Ce qui donne un ratio de 3/2 entre ces deux séries de chiffres. En classant dans l'ordre de grandeur les six premiers chiffres on obtient le nombre 124578 et le ratio 124578/142857 donne un nombre dont les décimales sont formée de la série répétitive 8-7-2-0-4-6. Cette série s'organise en trois zones multiples de 9 identiques à celles décrites dans cet article et les quatre nombres manquants forme une quatrième zone multiples de 9 et dans un rapport 3/2 avec la série :

124578/142857 = 0,**872046**872046872046…									
1	2	3	4	5	6	4 chiffres manquants			
8	**7**	**2**	**0**	**4**	**6**	**1**	**3**	**5**	**9**
	9 (1 x 9)		**0** (0 x 9)			**18 (2 x 9)**			
18 (2 x 9)									
27 (3 x 9)									

Fig. 64. Nombre rationnel 124578/142857 dérivé de 1/7.

L'auteur jugère que ce phénomène n'est pas fortuit et est lié à l'ensemble des autres phénomènes présentés dans cet article.

8.4. Suite de Fibonacci.

En divisant chaque nombre de la suite de Fibonacci par 10^n, n étant le rang de chaque nombre, puis en additionnant ces nombres, on obtient un nombre qui tend vers le nombre rationnel 10/89. Ce nombre a aussi la même organisation d'apparition de chiffre en quatre zones multiples d'un diviseur de 45 :

Suite de Fibonacci	Suite de Fibonacci par 10^{-n}	Additions des valeurs (jusqu'à ∝)	
1	0, **1**		
1	+ 0, 0**1**		
2	+ 0, 00**2**		
3	+ 0, 000**3**		
5	+ 0, 0000**5**		
8	+ 0, 00000**8**	= 0,**1**1**2359**55**0**5**6**1**7**97752**8**08…**4**…	$= \frac{10}{89}$
13	+ 0, 00000**13**		
21	+ 0, 000000**21**		
34	+ 0, 0000000**34**		
55	+ 0, 00000000**55**		
…	+ 0, 0………………		
	0,112359550561…		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**2**	**3**	**5**	**9**	**0**	**6**	**7**	**8**	**4**
	5 (1 x 5)		**5** (1 x 5)			**25 (5 x 5)**			
10 (2 x 5)									
20 (4 x 5)									

Fig. 65. Spéciale addition des nombres de Fibonacci : 10/89 s'organise en 4 zones multiples d'un diviseur de 45.

Il est bien connu que cette suite de Fibonacci donne le nombre Phi, sujet principal de cet article. Cette constatation supplémentaire ne peut qu'accréditer l'idée que l'ordre de la première apparition des dix chiffres formant les décimales de nombreuses constantes mathématiques n'est pas fortuit.

9. Les nombres premiers, le système décimal et le ratio 3/2.

En parallèle à l'étude de l'ordre de la première apparition des dix chiffres du système décimal dans les décimales de nombreuses constantes mathématiques et nombres particuliers décrits dans cet article, de remarquable propriétés relatives à la formation des dix chiffres (confondus en nombres) et de l'écriture digitale des nombres premiers sont obligées d'être présentées ici.

9.1. Formation des dix chiffres/nombres (d'après les nombres premiers).

Les dix chiffres/nombres : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Six nombres premiers ou nombre fondamentaux (0 et 1): 0 1 2 3 5 7. Somme égale à 18.
Quatre nombres non premiers ou non fondamentaux : 4 6 8 9. Somme égale à 27

Soit un ratio de 18/27 (soit 2/3).

Quatre non premiers : 4 6 8 9

Les 4 non premiers	Combinaisons (des premiers)	Soit avec les premiers (une fois)	Quantité de premiers (nombres d'utilisation)
4	2 x 2	2	2 (2 fois le premier 2)
6	2 x 3	2 et 3	2 (premier 2 et premier 3)
8	2 x 2 x 2	2	3 (3 fois le premier 2)
9	3 x 3	3	2 (2 fois le premier 3)
		12	9

Fig. 66. Formation des quatre non premiers d'après les nombres premiers.

Les six nombres premiers ou nombres fondamentaux sont (bien sûr) juste la combinaison de 6 nombres premiers (eux-mêmes). Les quatre non premiers sont la combinaison de 9 nombres premiers (voir fig. 66).

Soit un ratio de 6/9 (soit 2/3).

La somme des nombres premiers formant les six nombres premiers et fondamentaux = 18
La somme des nombres premiers (compté une fois) formant les 4 nombres non premiers = 12

Soit un ratio de 18/12 (soit 3/2).

	Nombres premiers (et fondamentaux)	Nombres non premiers	ratio
Nombres/chiffres	0 1 2 3 5 7	4 6 8 9	
Somme des 6 nombres premiers Somme des 4 non premiers	18	27	18/27 soit 2/3
Somme des premiers pour former les 6 premiers Somme des premiers pour former les 4 non premiers	18	12	18/12 soit 3/2
Combinaisons de n premiers	6	9	6/9 soit 2/3

Fig. 67. Ratio 3/2 dans la formation des dix chiffres/nombres (d'après les nombres premiers).

9.2. Ecriture digitale des nombres premiers.

L'ensemble des nombres premiers ont seulement 1 – 2 – 3 – 5 – 7 – 9 en dernière position, soit 6 chiffres sont possibles en dernière position.

L'ensemble des nombres premiers n'ont pas 0 – 4 – 6 – 8 en dernière position, soit 4 chiffres ne sont possibles en dernière position.

La somme de 1 – 2 – 3 – 5 – 7 – 9 est égale à 27 et celle de 0 – 4 – 6 – 8 est égale à 18.

Donc il y a deux ratio 3/2 en rapport à l'écriture digitale des nombres premiers : 6 et 4 chiffres possibles ou non possible en dernière position et 27 et 18, les sommes respectives de ces 6 et 4 chiffres.

10. Conclusion.

L’ordre de la première apparition des dix chiffres formant les décimales de nombreuses constantes mathématiques n’est pas aléatoire. Dans les constantes présentées dans cet article, des zones toujours identiques d’apparition de un, deux, trois et quatre chiffres ont des totaux multiples d’un même diviseur de 45 (selon les constantes : 3, 5 ou 9). Ces zones d’apparition sont toujours le rang d’apparition 4 pour la zone d'un chiffre, les rangs 2 et 3 pour deux chiffres, les rangs 1, 5 et 6 pour trois chiffres et les rangs 7, 8, 9 et 10 pour quatre chiffres :

<table>
<tr><td>Rangs d'apparition ⇒</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Zones d'apparition ⇒</td><td></td><td colspan="2">Zone 2</td><td>Zone 1</td><td></td><td></td><td colspan="4" rowspan="2">Zone 4</td></tr>
<tr><td colspan="6">Zone 3</td></tr>
</table>

Fig. 68. Identification des quatre zones d'apparition des dix chiffres du système décimal dans les constantes.

La probabilité d'apparition de cette configuration générale n'est que de 1/18 et 94,44 % des configurations possibles n'ont pas cet arrangement. Cependant, les constantes Pi, 1/Pi, Phi (et 1/Phi), les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$, le nombre $\sqrt{4,5}$ (racine de la moyenne des dix chiffres du système décimal) la fonction Zêta 5 et de très nombreuses variantes de ces nombres présentées ici dont Phi+ [12] et des variantes de la constante de Neper (e) s'organisent dans cette configuration générale. Une forte proportion de ces nombres sont des valeurs ayant trait au domaine de la géométrie.

Aussi, une forte proportion (supérieure aux probabilités) de ces nombres, notamment la constante de Neper (e) présente un ratio de 3/2 dans l'apparition des chiffres de leurs décimales (six premiers sur quatre derniers chiffres apparus).

Le nombre Pi et Le Nombre d'Or (Phi) possèdent ces propriétés et ont la particularité de reproduire ces propriétés arithmétiques pour leur inverse. L'inverse du nombre Pi et l'inverse du Nombre d'Or sont liés par un phénomène encore plus singulier puisque, pour ces deux constantes fondamentales des mathématiques, avec une probabilité de seulement 1/12600, les mêmes chiffres apparaissent dans les quatre zones définies d'apparition des chiffres de leurs décimales.

Aussi, la constatation que ces phénomènes singuliers se vérifient pour de nombreuses constantes, dont les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ (racine des trois premiers nombres premiers), et des variantes de la constante de Neper (e) confirme que l'ordre de la première apparition des chiffres dans les décimales des constantes présentées ici n'est pas aléatoire. En conclusion, l'auteur propose de considérer l'existence d'une nouvelle famille de nombres possédant les caractéristiques décrites dans cet article. Famille de nombre dont le nombre Pi et le Nombre d'Or sont les plus significatifs représentants.

Annexe

[1] Il existe 3 628 800 différentes combinaisons possibles dans la répartition des apparitions des chiffres des décimales des constantes. 311 040 combinaisons présentent un ratio de 3/2 (27/18) soi seulement 1/11,66 : 91,43 % des combinaisons possibles n'ont donc pas ce ratio.

[2] La probabilité que les constantes π et $1/\pi$ aient simultanément un ratio de 3/2 (voir [1]) est de 1/23,66.

[3] Parmi les 3 628 800 combinaisons, 17 280 ont la même répartition de 6 et 4 chiffres, soi seulement 1/210 : 99,52% des combinaisons d'apparition de chiffres n'ont pas la même configuration (de 6 et 4 chiffres).

[4] Parmi les 3 628 800 combinaisons, 8 640 ont la même configuration arithmétique de 4 zones multiples de 9 et un ratio de 3/2, soi seulement 1/420 : 99,76 % des combinaisons possibles n'ont pas cette configuration.

[5] Parmi les 3 628 800 combinaisons, seulement 288 ont les mêmes chiffres répartis dans les 4 zones arithmétiques décrites, soi seulement 1/12600 : **99,99 % des combinaisons possibles n'ont pas cette configuration.**

[6] Parmi les 3 628 800 combinaisons, 201 600 ont les mêmes zones de 4 chiffres dont les totaux sont multiples des mêmes nombres (3, 5 ou 9 selon les combinaisons) soit seulement 1/18 : 94,44 % des combinaisons possibles n'ont pas cette configuration.

[7] Combinaisons possibles = 9 x 7 x 5 x 3 x 1 = 945.

[8] - $\sin^2$ de l'angle dont la tangente = π : 0,90800033164962476754… $\pi^2/(\pi^2 + 1)$
- $\sin^2$ de l'angle dont la tangente = φ : 0,72360679774997896964091…5…$\varphi^2/(\varphi^2 + 1)$

[9] Parmi les 3 628 800 combinaisons, 3 456 ont à la fois les six premiers chiffres du système décimal (de 0 à 5) dans les six premiers rangs d'apparition et les mêmes zones de 4 chiffres dont les totaux sont des multiples des mêmes diviseurs de 45 (3 ou 5 selon les combinaisons) soit 1/1 050.

[10] - $(\pi\sqrt{3})^4$: 876,681819306021935127962994198…
- 1/cos de l'angle dont la tangente est 4/π : 1,61899318660623286240765967…
- 1/cos de l'angle dont la tangente est e/π : 1,32237207696748056509441395…
- 1/4φ : 0,154508497187473712051146708…
- 3φ/2 : 2,427050983124842272306880…
- sin de l'angle dont la tangente est 4/e : 0,827091663…70615584…
- sin de l'angle dont la tangente est $2\varphi/\sqrt{5}$: 0,822701898389593218034076…

[11] Parmi les 3 628 800 combinaisons, 10 368 ont la même configuration arithmétique de 4 zones multiples de 9 (avec ou sans ratio 3/2), soi 1/350. 99, 71 % des combinaisons possibles n'ont pas cette configuration.

[12] Dans l'attente d'une appellation plus officielle, l'auteur propose d'appeler provisoirement le nombre, variante du Nombre d'Or, $\frac{\sqrt[3]{5}+1}{2}$ (1,3549879733383484946765544362719…0…) Phi+ et de le représenter par le symbole φ_+.

[13] $r = e^{2\pi/5}\left(\sqrt{\varphi+2}+i^2\varphi\right)$: par soucis de simplification des démonstrations ce nombre est nommé ici r comme *Rogers* et *Ramanujan*.

φ/r = 1,6210555640245749558387576785698
$r\times\varphi$ = 1,6150180455567689912054319315883
φ/r^2 = 1,62408278189836239867180910809 39…5…
r/φ^4 = 0,14562608632223968713316326201939
$\varphi/\sqrt{r}$ = 1,6195440717201534561999262513712…8…
$\varphi/\sqrt[3]{r}$ = 1,6190405542023005829273871877919

[14] ''The hard hexagon constant'' : le lecteur averti doit connaître cette constante dont l'auteur (autodidacte) n'a pas trouvé de définition précise en français).

[15] x est résultat de l'équation $x^3 - 2x = (2\varphi - 1)^2$ égale à la fonction $x^3 - 2x - 5 = 0$ utilisée dans la méthode Newton.